ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 21, Nos. 2-3, 1975

REMARQUES SUR LES SYSTEMES DYNAMIQUES DONNES AVEC PLUSIEURS FACTEURS

PAR

JEAN-PAUL THOUVENOT†

ABSTRACT

Two Bernoulli shifts are given, (X, T) and (X', T'), with independent generators $R = P \vee Q$ and $R' = P' \vee Q'$ respectively. (R and R' are finite). One can choose R such that if (X', T') can be made a factor of (X, T) in such a way that $(P')_{T'}$ and $(Q')_{T'}$ are full entropy factors of $(P)_T$ and $(Q)_T$ respectively then $d(P \vee Q) = d(P' \vee Q')$. In addition it is proved that if (X, T) is a Bernoulli shift and if S is a measure preserving transformation of X that has the same factor algebras as T then $S = T$ or $S = T^{-1}$. A tool for this proof, which may be of independent interest is a relative version for very weak Bernoullicity.

Introduction

Soit (X, T, m) un système dynamique ergodique d'entropie finie. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux sous σ-algèbres T-invariantes de X telles que $\mathscr{A} \vee \mathscr{B} = X$. On appelle ici système la donnée de (X, T, m) et des deux facteurs $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ (dans cet ordre). Un système est notè: $(X, \mathscr{A}, \mathscr{B}, T, m)$.

On dit que le système $(X, \mathscr{A}, \mathscr{B}, T, m)$ est isomorphe au système $(\bar{X}, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mathscr{B}}, \bar{T}, \bar{m})$ s'il existe un ensemble $\bar{X}_1$ $\bar{T}$-invariant de mesure 1 dans X et un ensemble X_1 T-invariant de mesure 1 dans $\bar{X}$ ainsi qu'une bijection bi-mesurable ϕ de X_1 dans $\bar{X}_1$ telle que:

(1) $\phi_0 m = \bar{m}$

(2) $T \cdot \phi = \phi_0 T$

(3) $\phi(\mathscr{A}) = \bar{\mathscr{A}}$ (On désigne encore par $\mathscr{A}$ la restriction de $\mathscr{A}$ à X_1)

(4) $\phi(\mathscr{B}) = \bar{\mathscr{B}}$.

† Equipe de Recherche n° 1 "Processus stochastique et applications" dépendant de la Section n° 1 "Mathématiques, Informatique" associée au C.N.R.S.

Received December 22, 1974

Si ϕ est une injection et si, au lieu de (3) et (4) les conditions

$$(3') \qquad \phi^{-1}(\bar{\mathscr{A}}) \subset \mathscr{A}$$

$$(4') \qquad \phi^{-1}(\bar{\mathscr{B}}) \subset \mathscr{B}$$

sont vérifiées, on dit que le système $(\bar{X}, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mathscr{B}}, \bar{T}, \bar{m})$ est un facteur du système $(X, \mathscr{A}, \mathscr{B}, T, m)$. Enfin, on dit que $(\bar{X}, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mathscr{B}}, \bar{T}, \bar{m})$ est un facteur principal de $(X, \mathscr{A}, \mathscr{B}, T, m)$ si c'est un facteur et si

$$(4) \qquad E(T_{\mathscr{A}}) = E(\bar{T}_{\bar{\mathscr{A}}})$$

$$(5) \qquad E(T_{\mathscr{B}}) = E(\bar{T}_{\bar{\mathscr{B}}}).$$

(Par $E(T_{\mathscr{A}})$ on désigne l'entropie de l'action de T restreinte au facteur $\mathscr{A}$.) On dit que le systéme $(X, \mathscr{A}, \mathscr{B}, T, m)$ est un système de Bernoulli si on a la propriété suivante: il existe deux partitions finies P et Q de X telles que

$$(1) \qquad \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P = \mathscr{A}$$

$$(2) \qquad \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q = \mathscr{B}$$

(3) les $T^i(P \vee Q)$ $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes.

Ce système de Bernoulli est alors noté $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$. (Dans cette définition la donnée $(P)_T$ équivaut à la donnée du facteur $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P$ et de la partition P.)

Nous allons prouver (Proposition 1) que le problème de l'isomorphisme des systèmes de Bernoulli est très différent du problème de l'isomorphisme des schémas de Bernoulli en montrant le résultat suivant:
il existe un système de Bernoulli $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ tel que si le système de Bernoulli $(\bar{X}, (\bar{P})_{\bar{T}}, (\bar{Q})_{\bar{T}}, \bar{T}, \bar{m})$ est un facteur principal de $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ alors:

$d(P \vee Q) = d(\bar{P} \vee \bar{Q})$. (Les deux partitions ont même distribution.)

Remarquons que ce résultat a une portée restreinte du fait que toutes les partitions que l'on considére ici sont finies. A l'opposé du cas précédent correspond celui du système de Bernoulli $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ tel que $P \perp^{P \wedge Q} Q$. Le problème de l'isomorphisme des systèmes de cette sorte est résolu dans la Proposition 3. Les méthodes utillisées dans les démonstrations précédentes nous permettent de prouver enfin que si (X, T) est un schéma de Bernoulli et si S est une transformation qui a les mêmes facteurs que T, alors

$S = T$ ou $S = T^{-1}$ (Proposition 2). (Dans [5] P. C. Shields a prouvé que S est nécessairement un schéma de Bernoulli.)

Notations

Soit $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}, T, m)$ un système et P et Q deux partitions finies de X telles que $(P)_T = \mathcal{A}$, $(Q)_T = \mathcal{B}$. Soit A l'opérateur de $L^2(X)$ dans $L^2(X)$ défini par $A = E^{\mathcal{A}} E^{\mathcal{B}} E^{\mathcal{A}}$. ($E^{\mathcal{A}}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{A}$). A est un opérateur positif. Soit s un nombre réel positif. Soit

$$1_{p_{i_1}} 1_{p_{i_2}} \cdots 1_{p_{i_k}} 1_{q_{i_1}} \cdots 1_{q_{i_k}}$$

la fonction caractéristique d'un cylindre de $(P \vee Q)^{\mathbf{Z}}$.

On pose:

$$\tau_s(m)(p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k} q_{i_1} \cdots q_{i_k}) = \int_X 1_{q_{i_1}} \cdots 1_{q_{i_k}} A^s 1_{p_{i_1}} \cdots 1_{p_{i_k}} dm.$$

On appelle $I(m)$ l'ensemble des $s \in \mathbf{R}^+$ tels que $\tau_s(m)$ définisse une mesure positive sur $(P \vee Q)^{\mathbf{Z}}$. $I(m)$ contient $\mathbf{N}$. De plus quand $s \in I(m)$, $\tau_s(m)$ est stationnaire et m et $\tau_s(m)$ coincident sur $(P)_T$ et $(Q)_T$.

Si $s \in I(m)$ on désigne par $((P \vee Q)^{\mathbf{Z}}, (P)_T, (Q)_T, T, \tau_s(m))$ le système défini sur $(P \vee Q)^{\mathbf{Z}}$ muni de la mesure $\tau_s(m)$ où T désigne la translation et où sont donnés les deux facteurs $(P)_T$ et $(Q)_T$. Il est évident que pour $s = 0$, le système précédent est isomorphe au système $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}, T, m)$. Nous allons voir dans le lemme qui suit que le système obtenu avec la mesure $\tau_s(m)$ ne dépend pas du choix de P et Q. Dans la notation d'une partition on précise quand c'est nécessaire la mesure qu'on utilise. Ainsi $(P \vee Q, \tau_s(m))$ désigne la partition dont l'élément $p_i q_j$ a la mesure $\tau_s(m)(p_i q_j)$.

LEMME 1. (1) *Soit $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}, T, m)$ un système. Soient P, Q, P_1, Q_1 quatre partitions finies de X telles que; $(P)_T = (P_1)_T = \mathcal{A}$, $(Q)_T = (Q_1)_T = \mathcal{B}$.*

Alors pour tout $s \in I(m)$ le système $((P \vee Q)^{\mathbf{Z}}, (P)_T, (Q)_T, T, \tau_s(m))$ est isomorphe au système $((P_1 \vee Q_1)^{\mathbf{Z}}, (P_1)_T, (Q_1)_T, T, \tau_s(m))$.

(2) *Soit $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ un système de Bernoulli. Alors* (i) *pour tout $s \in I(m)$ le système $(X, (P)_T, (Q)_T, T, \tau_s(m))$ est un système de Bernoulli.* (ii) *Il existe s_0 tel que pour tout $s > s_0$ $s \in I(m)$.*

DEMONSTRATION. Si $f \in L^2(P)_T$ et si $g \in L^2(Q)_T$, (on ne précise pas la mesure puisque sur ces deux σ-algèbres, m coïncide avec $\tau_s(m)$ pour tout $s \in I(m)$), on remarque que:

$$\int fg\, d\tau_s(m) = \int gA^s f\, dm.$$

Ceci prouve (1). Soient maintenant $\mathcal{A}_i$ $1 \leqq i \leqq n$ et $\mathcal{B}_i$ $1 \leqq i \leqq n$ $2n$ sous σ-algèbres de l'espace de Lebesgue Y telles que les n sous σ-algèbres $\mathcal{A}_i \vee \mathcal{B}_i$ $1 \leqq i \leqq n$ soient indépendantes.

Alors si $g = \Pi_{i=1}^n h_i$ avec $h_i \in L^2(\mathcal{B}_i)$ pour $1 \leqq i \leqq n$, on a:

$$E^{\vee_{i=1}^n \mathcal{A}_i} g = \prod_{i=1}^n E^{\mathcal{A}_i} h_i.$$

Soit $i \in \mathbf{Z}$. Dans $(T^i(P \vee Q), m)$ soit A_i l'opérateur de: $L^2(T^i(P \vee Q), m) \to L^2(T^i(P \vee Q), m)$ défini par: $A_i = E^{T^iP} E^{T^iQ} E^{T^iP}$.

Soit $s \in I(m)$. Comme par hypothèse les $(T^i(P \vee Q), m)$ $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes, on a que:

$$A^s\, 1_{p_{i_1}} \cdots 1_{p_{i_k}} = \prod_{j=1}^k A_j^s\, 1_{p_{i_j}} \tag{I}$$

($1_{p_{i_1}} \cdots 1_{p_{i_k}}$ désigne la fonction caractèristique d'un cylindre de $P^{\mathbf{Z}}$).

La définition de $\tau_s(m)$ entraîne alors que les partitions $(T^i(P \vee Q), \tau_s(m))$, $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes. Ce qui prouve (2) (i). Pour prouver (ii) on remarque que s est dans $I(m)$ dès que $(P \vee Q, \tau_s(m))$ est une partition dont tous les éléments ont une mesure non négative. Mais quand $s \to \infty$, $\tau_s(m)$ converge faiblement vers $\tau_\infty(m)$ qui est une mesure pour laquelle P et Q sont conditionnellement indépendantes par rapport à $P \wedge Q$. (Voir [2]). Comme $P \vee Q$ est finie, on a (ii).

Comme conséquence immédiate de ce lemme, on a le.

Corollaire 1. *Soient $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ et $(\bar{X}, (\bar{P})_{\bar{T}}, (\bar{Q})_{\bar{T}}, \bar{T}, \bar{m})$ deux systèmes de Bernoulli isomorphes. Alors il existe s_0 tel que pour tout $s > s_0$: $E(P \vee Q, \tau_s(m)) = E(\bar{P} \vee \bar{Q}, \tau_s(\bar{m}))$.*

Notre but maintenant est d'arriver à la même conclusion avec l'hypothèse plus faible que l'un de ces deux systèmes est un facteur principal de l'autre.

Lemme 2. *Soit P une partition d'entropie finie de l'espace de Lebesgue Y. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous σ-algèbres de Y telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Alors si $E(P \mid \mathcal{A}) = E(P \mid \mathcal{B})$, on a pour tout $p \in P$.*

$$E^{\mathcal{A}}\, 1_p = E^{\mathcal{B}}\, 1_p \qquad \text{p.s.}$$

Lemme 3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}, T, m)$ un système. Soient R et S deux partitions de X telles que*

(1) $$T^i(R \vee S) \qquad i \in \mathbf{Z}$$

sont indépendantes (la mesure n'est pas précisée car elle ne va pas varier ici)

(2) $$R \subset \mathcal{A}$$

(3) $$S \subset \mathcal{B}$$

(4) $$E(R) = E(T_{\mathcal{A}}), \quad E(S) = E(T_{\mathcal{B}}).$$

Soit $\mathcal{A}_1 = (R)_T$ et $\mathcal{B}_1 = (S)_T$. Soit $A = E^{\mathcal{A}} E^{\mathcal{B}} E^{\mathcal{A}}$ et $A_1 = E^{\mathcal{A}_1} E^{\mathcal{B}_1} E^{\mathcal{A}_1}$. Alors $AL^2(\mathcal{A}_1) \subset L^2(\mathcal{A}_1)$ et sur $L^2(\mathcal{A}_1)$ A et A_1 coincident.

Demonstration. Soient P et Q deux partitions finies telles que: $(P)_T = \mathcal{A}$, $(Q)_T = \mathcal{B}$. On va montrer que:

$$E(R \mid R^- \vee (Q)_T) = E(R \mid R^- \vee (S)_T) = E(R \mid S) = E(R \mid (Q)_T).$$

(On aura de même $E(S \mid S^- \vee (P)_T) = E(S \mid R) = E(S \mid (P)_T)$.)

$$\left(R^- = \bigvee_{-1}^{-\infty} T^i R\right).$$

En effet:
(a) $E(R \vee Q, T) = E(R \vee S, T)$ puisque $E(R \vee Q, T) \geqq E(R \vee S, T)$ d'après (3) et que: $E(R \vee S, T) = E(S, T) + E(R \mid R^- \vee (S)_T)$, $E(R \vee Q, T) = E(Q, T) + E(R \mid R^- \vee (Q)_T)$ entraînent $E(R \vee S, T) \geqq E(R \vee Q, T)$ d'après (3) et (4).
(b) $E(R \mid R^- \vee (S)_T) = E(R \mid (S)_T) = E(R \mid S)$ (évident).

De plus:

$$E(R \mid R^- \vee (Q)_T) = E(R \mid (Q)_T)$$

car:

$$E(R \mid R^- \vee (Q)_T) \leqq E(R \mid (Q)_T) \leqq E(R \mid (S)_T) = E(R \mid R^- \vee (S)_T).$$

Donc:

$$E(R \mid (Q)_T) = E(R \mid (S)_T) = E(R \mid S).$$

Il en résulte que si

$$f \in L^2(R)_T \colon E^{(S)_T} f = E^{(Q)_T} f.$$

(On utilise le Lemme 2 et l'égalité obtenue en changeant R en $\bigvee_{-n}^{n} T^i R$, S en $\bigvee_{-n}^{n} T^i S$, Q en $\bigvee_{-n}^{n} T^i Q$ et T en T^{2n+1}.)

Un raisonnement analogue pour P et S entraîne le résultat. Comme conséquence immédiate des Lemmes 1 et 3, on a le

COROLLAIRE 2. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}, T, m)$ *un système et* $(\bar{X}, (\bar{P})_{\bar{T}}, (\bar{Q})_{\bar{T}}, \bar{T}, \bar{m})$ *un système de Bernoulli qui est un facteur principal du précédent. Alors pour tout* $s \in I(m)$, *on a*: $E(T, \tau_s(m)) = E(\bar{P} \vee \bar{Q}, \tau_s(\bar{m}))$.

Si le premier système est le système de Bernoulli $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ *la relation précédente devient*: $E(P \vee Q, \tau_s(m)) = E(\bar{P} \vee \bar{Q}, \tau_s(\bar{m}))$.

LEMME 4. *Soit* $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ *un système de Bernoulli. Soit* $A_0 = E^P E^Q E^P$. *Soient* λ_i $1 \leqq i \leqq I$ *les valeurs propres de* $A_0 (0 \leqq \lambda_i \leqq 1$ *pour tout* $i)$. *Alors*: $A = E^{(P)_T} E^{(Q)_T} E^{(P)_T}$ *est à spectre discret.*

L'ensemble de ses valeurs propres est constitué par les nombres:

$$\prod_{k=1}^{N} \lambda_{i_k}^{\alpha_k} \quad \alpha_k \in \mathbf{N}, \qquad N \in \mathbf{N}.$$

DEMONSTRATION. Ce résultat se démontre de la même manière que l'identité (I) utilisée dans la démonstration du Lemme 1.

PROPOSITION 1. *Il existe une partition abstraite* $R = P \vee Q$ *telle que si* $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ *désigne le système de Bernoulli muni du générateur indépendant* $(P \vee Q, m)$ *et si* $(\bar{X}, (\bar{P})_{\bar{T}}, (\bar{Q})_{\bar{T}}, \bar{T}, \bar{m})$ *est un système de Bernoulli qui est un facteur principal de* $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ *alors*:

$$d(P \vee Q) = d(\bar{P} \vee \bar{Q}).$$

DEMONSTRATION. $\bar{P}$ est prise avec deux éléments; on choisit $P \vee Q$ de façon que $P \wedge Q = \gamma$ et que P ne soit pas pas indépendante de Q.

$L^2(P)$ a donc la dimension 2. A_0 restreint à $L^2(P)$ a deux valeurs propres 1 et λ. $(0 < \lambda < 1.)$ 1 correspond à la fonction constante et λ à une fonction propre f.

$$\tau_s(m)(p_i q_j) = E(1_{q_j} A_0^s 1_{p_i}) \qquad i \in I \qquad j \in J$$

(I désigne l'ensemble d'indices qui décrit la partition P, J l'ensembles qui décrit Q.)

Soit $s > s_0$ du Lemme 1. Alors:

$$(1) \qquad E(P \vee Q, \tau_s(m)) = -\sum_{i,j \in I \times J} (a_{ij} + b_{ij}\lambda^s) \log (a_{ij} + b_{ij}\lambda^s).$$

(En effet $1_{p_i} = m(p_i) + b_{p_i} f$ et $\tau_s(m)(p_i q_j) = m(p_i)\, m(q_j) + b_{p_i} E(f 1_{q_j})\lambda^s$. On a donc posé: $a_{ij} = m(p_i)\, m(q_j)$, $b_{ij} = b_{p_i} E(f 1_{q_j})$.)

Soit $\bar{A}_0$ l'opérateur $E^{\bar{P}}E^{\bar{Q}}E^{\bar{P}}$. D'après le Lemme 4 et le Lemme 3, $\bar{A}_0$ doit avoir ses valeurs propres distinctes de 0 dans l'ensemble: $\{1, \lambda, \lambda^2, \cdots, \lambda^r\}$ pour un $r \in N$ car $\bar{P} \vee \bar{Q}$ est finie. (Il suffit en fait que $\bar{P}$ ou $\bar{Q}$ soit finie). Soit K l'ensemble d'indices qui décrit la partition $\bar{P}$ et L l'ensemble d'indices qui décrit la partition $\bar{Q}$. Il existe une famille de polynômes: $P_{k,l}(u)$ $k \in K$, $l \in L$ tels que:

$$(2) \qquad E(\bar{P} \vee \bar{Q}, \tau_s(\bar{m})) = -\sum_{(k,l) \in K \times L} P_{k,l}(\lambda^s) \log P_{k,l}(\lambda^s) \quad (s > s_0)$$
$$(P_{k,l}(\lambda^s) = \tau_s(\bar{m}\ (\bar{p}_k \bar{q}_l)).$$

Le Corollaire 2 entraîne que les deux membres de droite de (1) et de (2) sont égaux dès que $s > s_0$. Posant $\lambda^s = u$, on a donc:

$$(3) \qquad \sum_{i,j \in I \times J} (a_{ij} + b_{ij}u) \log (a_{ij} + b_{ij}u) = \sum_{(k,l) \in K \times L} P_{k,l}(u) \log P_{k,l}(u) \quad (u < u_0).$$

Nous imposons maintenant les conditions (C_1) et (C_2) à $P \vee Q$

(C_1): Si $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ $(i_1, j_1) \in I \times J$ $(i_2, j_2) \in I \times J$

$$\frac{a_{i_1 j_1}}{b_{i_1 j_1}} \neq \frac{a_{i_2 j_2}}{b_{i_2 j_2}}$$

(C_2): $b_{i,j} \neq 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$.

(Ces conditions se traduisent facilement de la façon suivante:

C_1: $(m(p_{i_1} q_{j_1})/m(p_{i_1})m(q_{j_1})) \neq (m(p_{i_2} q_{j_2})/m(p_{i_2})m(q_{j_2}))$ dès que $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$

C_2: $m(p_i q_j) \neq m(p_i)m(q_j)$ pour tout (i, j) de $I \times J$.

On peut construire beaucoup d'exemples de partitions $P \vee Q$ satisfaisant (C_1) et (C_2) sauf dans le cas où: $d(P) = d(Q) = (1/2, 1/2)$. Dans ce cas (C_1) n'est jamais satisfaite. Paul Shields et l'auteur ont prouvé, dans un travail en préparation, que la conclusion de la Proposition 1 est encore vraie si: $d(P) = d(Q) = (1/2, 1/2)$ à condition qu'on prenne l'hypothèse plus forte que $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ et $(\bar{X}, (\bar{P})_{\bar{T}}, (\bar{Q})_{\bar{T}}, \bar{T}, \bar{m})$ sont isomorphes.)

Remarquons maintenant que si R_s $1 \leqq s \leqq n$ est une suite de polynômes de la variable u, $R_s \equiv a_s + ub_s$ tels que:

$$\frac{a_{s_1}}{b_{s_1}} \neq \frac{a_{s_2}}{b_{s_2}}$$

si $s_1 \neq s_2$ et que $b_s \neq 0$ pour tout $1 \leqq s \leqq n$ et si Q_s $1 \leqq s \leqq n$, Q est une suite de polynômes de la variable u, l'identité

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s(u) \log R_s(u) = Q(u)$$

pour un ensemble de u contenant un intervalle réel entraîne $Q_s(u) = 0$ $\forall s\ 1 \leqq s \leqq n$.

Il est facile de vérifier que tout 0 d'un polynôme P_{kl} doit être un zéro d'un des polynômes $a_{ij} + b_{ij} u$.

Par conséquent il existe une application $\pi: K \times L \to \mathcal{P}(I \times J)$ (l'ensemble des parties de $I \times J$) et des nombres: $C_{kl} \in R^+$, $\alpha_{k,l,i,j} \in N$ tels que:

$$P_{k,l}(u) = C_{kl} \prod_{(i,j) \in \pi(k,l)} (a_{ij} + b_{ij} u)^{\alpha_{klij}}. \tag{4}$$

Soit ρ l'application de: $I \times J \to \mathcal{P}(K \times L)$ qui à $(i,j) \in I \times J$ associe l'ensemble des (k,l) tels que: $\pi(k,l) \ni (i,j)$.

Alors la remarque et les égalités (3) et (4) entraînent:

$$(a_{ij} + b_{ij} u) = \sum_{(k,l) \in \rho(i,j)} P_{k,l}(u) \alpha_{klij} \qquad (u < u_0). \tag{5}$$

Mais on doit avoir:

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} + b_{ij} u \equiv 1 \equiv \sum_{(k,l) \in K \times L} P_{k,l}(u) \qquad u < u_0.$$

Comme pour $u < u_0$ $P_{k,l}(u) \geqq 0$ l'égalité (5) entraîne que ρ est une bijection d'où le résultat.

Considérons maintenant un système de Bernoulli $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ tel que P et Q aient chacune deux éléments, que $P \wedge Q = \gamma$ et que P ne soit pas indépendante de Q. Soit S une transformation inversible qui préserve la mesure m sur X et telle qu'en plus

$$S(P)_T = (P)_T, S(Q)_T = (Q)_T.$$

Alors:

LEMME 5. *Il existe une injection σ de $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ telle que pour tout $i \in \mathbf{Z}$:*

$$S(T^i(P \vee Q)) = T^{\sigma(i)}(P \vee Q).$$

DEMONSTRATION. On conserve les notations utilisées dans la démonstration de la Proposition 1. Soit f la fonction de $L^2(P)$ telle que $Af = \lambda f (0 < \lambda < 1)$ (λ étant valeur propre de A_0). f est une fonction qui prend des valeurs distinctes sur chaque atome de la partition P (qui a deux éléments). Considérons $\mathcal{H}_\lambda$ le sous espace de $L^2(P)_T$ correspondant à la valeur propre λ de A. $\mathcal{H}_\lambda$ est égal à la fermeture dans $L^2(P)_T$ de l'espace engendré par les combinaisons linéaires finies des $T^i f$ $i \in \mathbf{Z}$. Les hypothèses faites sur S entraînent que A et S

commutent. Par conséquent $S_0 f$ est dans $\mathcal{H}_\lambda$. Comme les $T^i f$ sont orthogonales, il existe une suite de nombres a_i $i \in \mathbf{Z}$ tels que:

$$\left\| S_0 f - \sum_{-N}^{N} a_i T^i f \right\|_2 \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to +\infty.$$

Comme les $T^i f$ sont indépendantes, la convergence précédente a lieu aussi p.s. et s'il existait plus d'un a_i différent de 0, on pourrait écrire:

$$Sf = g_1 + g_2 \qquad \text{(p.s.)}$$

où g_1 et g_2 sont indépendantes. Mais Sf qui ne prend que deux valeurs est indécomposable. D'où le résultat.

La définition qui suit est la version conditionnelle de la définition d'une partition "très faiblement Bernoulli" qui a été donnée par D. S. Ornstein dans [3].

Definition. Soit (X, T) un système dynamique ergodique et P et H deux partitions finies de X. On dit que P est $(H)_T$ — conditionnellement très faiblement de Bernoulli si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $m > 0$, il existe un p (qui dépend de ε, et de m) tel que pour tout $k > p$ on ait:

$$\bar{d}\left(\{T^i P_{/h}\}_1^N,\ \{T^i P_{/h \cap q}\}_1^N\right) < \varepsilon$$

pour une famille d'éléments $h \cap q (h \in \vee_{-k}^{k} T^i H,\ q \in \vee_0^{-m} T^i P)$ dont la réunion a une mesure plus grande que $1 - \varepsilon$.

Lemme 6. *Si P est $(H)_T$-conditionnellement très faiblement de Bernoulli, alors P est H-conditionnellement finiment determinée* (voir la definition dans [6]).

Demonstration. Nous devons prouver qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_1 et η tels que si $(\bar{X}, \bar{T})$ est un système dynamique ergodique et $\bar{P}$ et $\bar{H}$ sont deux partitions finies de $\bar{X}$ telles que:

$$(H, T) \sim (\bar{H}, \bar{T}) \tag{1}$$

$$d\left(\bigvee_{-n_1}^{n_1} T^i (P \vee H),\quad \bigvee_{-n_1}^{n_1} \bar{T}^i (\bar{P} \vee \bar{H})\right) < \eta \tag{2}$$

$$\left| E(P \vee H, T) - E(\bar{P} \vee \bar{H}, \bar{T}) \right| < \eta \tag{3}$$

alors pour tout entier p il existe une suite de partitions de l'espace $Z, P^i, \bar{P}^i, H^i, 0 \leqq i \leqq p$ telles que

$$d\left(\bigvee_0^p \bar{T}^i(\bar{P} \vee \bar{H})\right) = d\left(\bigvee_0^p (\bar{P}^i \vee H^i)\right) \tag{4}$$

$$d\left(\bigvee_0^p T^i(P \vee H)\right) = d\left(\bigvee_0^p (P^i \vee H^i)\right) \tag{5}$$

$$\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} |P^i - \bar{P}^i - \bar{P}^i| < \varepsilon . \tag{6}$$

Pour cela nous prouvons d'abord que si P est $(H)_T$ – conditionnellement très faiblement de Bernoulli étant donné $\varepsilon_1 > 0$, il existe $N(\varepsilon_1)$ et η_1 tels que si $\bar{P} \vee \bar{H}, \bar{T}$ vérifie:

$$(H, T) \sim (\bar{H}, \bar{T}) \tag{7}$$

$$d\left(\bigvee_{-N}^{N} T^i(P \vee H), \quad \bigvee_{-N}^{N} \bar{T}^i(P \vee H)\right) < \eta_1 \tag{8}$$

$$|E(P \vee H, T) - E(\bar{P} \vee \bar{H}, \bar{T})| < \eta_1 \tag{9}$$

alors il existe un n et un p tels que pour tout m pour tout $k > p$, il existe une famille $A_{m,k}$ d'atomes

$$h \cap q\left(h \in \bigvee_{-k}^{k} \bar{T}^i\bar{H}, q \in \bigvee_{0}^{-m} \bar{T}^i\bar{P}\right), m(A_{m,k}) > 1 - \varepsilon_1 \text{ tels que si } h \cap q \in A_{m,k}$$

alors:

$$\bar{d}(\{\bar{T}^i\bar{P}_{/h}\}_1^n, \quad \{\bar{T}^i\bar{P}_{/h\cap q}\}_1^n) < \varepsilon_1. \tag{10}$$

En effet, on prend $n = n(\varepsilon_1)$ dans la définition de très faiblement Bernoulli et on prend ensuite δ_1 tel que si:

$$\left|E\left(\bigvee_1^n T^iP \mid R\right) - E\left(\bigvee_1^n T^iP\right)\right| < \delta_1$$

alors:

$$\bigvee_1^n T^iP \overset{\varepsilon_1^2/10}{\perp} R \quad (\delta_1 \text{ ne dépend que de } \varepsilon_1^2/10).$$

Soit n^* tel que:

$$E\left(\bigvee_1^n T^iP \mid \bigvee_{-n^*}^{0} T^iP \vee \mathscr{A}\right) < n\,E\left(P, T \mid \mathscr{A}\right) + \frac{\varepsilon_1^2\delta_1}{10} \quad \left(\mathscr{A} = (H)_T\right). \tag{11}$$

Soit maintenant p_1 tel que:

$$E\left(\bigvee_1^n T^iP \mid \bigvee_{-n^*}^{0} T^iP \vee \bigvee_{-p_1}^{p_1} T^iH\right) < E\left(\bigvee_1^n T^iP \mid \bigvee_{-n^*}^{0} T^iP \vee \mathscr{A}\right) + \frac{\varepsilon_1^2\delta_1}{10}. \tag{12}$$

Enfin il existe d'après la définition de très faiblement Bernoulli un entier p_2 tel que:

$$\bar{d}(\{T^iP_{/h}\}_1^n, \{T^iP_{/h\cap q}\}_1^n) < \frac{\varepsilon_1^2}{10} \tag{13}$$

pour une famille d'éléments

$$h \cap q \quad \left(h \in \bigvee_{-k}^{k} T^iH, q \in \bigvee_{-n^*}^{0} T^iP\right)$$

dont la réunion a une mesure plus grande que $1 - \varepsilon_1^2/10$ dès que $k > p_2$.

Soit $N = \sup(n^*, p_1, p_2, n)$. Si maintenant η est choici suffisamment petit dans (2) et (3) on aura:

$$\bar{d}(\{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}}\}_1^n, \{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}\cap\bar{q}}\}_1^n) < \frac{\varepsilon_1^2}{10} \tag{14}$$

pour une famille d'éléments

$$\bar{h} \cap \bar{q} \left(\bar{h} \in \bigvee_{-p_3}^{p_3} \bar{T}^i\bar{H}, \bar{q} \in \bigvee_{-n^*}^{0} \bar{T}^i\bar{P}, p_3 = \sup(p_1, p_2)\right)$$

dont la réunion a une mesure plus grande que $1 - \varepsilon_1^2/10$ et

$$E\left(\bigvee_1^n \bar{T}^i\bar{P} \mid \bigvee_{-n^*}^{0} \bar{T}^i\bar{P} \vee \bigvee_{-p_3}^{p_3} \bar{T}^i\bar{H}\right) < nE\,(\bar{P}, \bar{T} \mid \bar{\mathscr{A}}) + \frac{\varepsilon_1^2\delta_1}{10}. \tag{15}$$

(15) et le choix de δ_1 entraînent que pour tout $m^* > 0$, pour tout $p^* > 0$, il existe une famille $A_{m^*l^*}$ d'atomes de

$$\bigvee_{-n^*}^{0} \bar{T}^i\bar{P} \vee \bigvee_{-p_3}^{p_3} \bar{T}^i\bar{H}$$

dont la réunion a une mesure plus grande que $1 - \varepsilon_1^2/10$, telle que si $\bar{h}\bar{q} \in A_{m^*l^*}$ alors:

$$\bigvee_1^n \bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}\bar{q}} \overset{\varepsilon_1^2/10}{\perp} \left(\bigvee_{n^*-m^*}^{-n^*-1} \bar{T}^i\bar{P} \vee \bigvee_{p_3+p^*\geqq|r|>p_3} \bar{T}^r\bar{H}\right)_{/\bar{h}\bar{q}.} \tag{16}$$

(14) et (16) entraînent

$$\bar{d}(\{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}}\}_1^n, \{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}h^*\bar{p}p^*}\}_1^n) < \frac{3\varepsilon_1^2}{10} \tag{17}$$

pour une famille d'atomes

$$\bar{h}h^*\bar{q}q^*, \left(\bar{h}h^* \in \bigvee_{-p_3-p^*}^{p_3+p^*} \bar{T}^i\bar{H}, \bar{q}q^* \in \bigvee_{-n^*-m^*}^{0} \bar{T}^i\bar{Q}\right)$$

dont la réunion a une mesure plus grande que $1-\varepsilon_1/3$. (17) entraîne

$$\bar{d}(\{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}}\}_1^n, \{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}h^*}\}_1^n) < \frac{2\varepsilon_1}{3} \tag{18}$$

pour une famille d'atomes

$$\bar{h}h^* \text{ de } \bigvee_{-p_3-p^*}^{p_3+p^-} \bar{T}^i\bar{H}$$

dont la réunion a une mesure plus grande que $1-\varepsilon_1/3$

$$\Bigg(\text{car } \bar{d}(\{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}}\}_1^n, \{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}h^*}\}_1^n) \leqq \sum_{\bar{q}q^* \in \bigvee_{-n^*-m^*}^{0} \bar{T}^i\bar{Q}} \frac{m(\bar{q}q^*\bar{h}h^*)}{m(\bar{h}h^*)} \bar{d}((\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}}\}_1^n, \{\bar{T}^i\bar{P}_{/\bar{h}h^*\bar{q}q^*}\}_1^n)\Bigg).$$

(17) et (18) entraînent (10).

Soit $\varepsilon_1 = \varepsilon/10$ et soit p pour lequel on veut vérifier (4) (5) et (6). Supposons qu'est construite une suite de partitions:

$$P^i, \bar{P}^i, 0 \leqq i \leqq k \quad \text{et} \quad H^j, -p_3 \leqq j \leqq p_3+p$$

telles que:

$$d\left(\bigvee_0^k P^i \vee \bigvee_{-p_3}^{p_3+p} H^j\right) = d\left(\bigvee_0^k T^iP \vee \bigvee_{-p_3}^{p_3+p} T^jH\right) \tag{19}$$

$$d\left(\bigvee_0^k \bar{P}^i \vee \bigvee_{-p_3}^{p_3+p} H^j\right) = d\left(\bigvee_0^k \bar{T}^i\bar{P} \vee \bigvee_{-p_3}^{p_3+p} T^jH\right) \tag{20}$$

$$\frac{1}{k+1}\sum_0^k |P^i - \bar{P}^i| < \varepsilon \tag{21}$$

(à cause de (10) une telle suite de partitions peut être construite si $k = n$) et montrons qu'on peut construire P^i et $\bar{P}^i, k+1 \leqq i \leqq k+n$ de façon que (19), (20) et (21) soient vérifiées avec k changé en $k+n$ (tant que $k+n \leqq p$). Cette construction se fait facilement comme dans [3] en utilisant (10) (et son analogue pour P, T) et en définissant P^i et $\bar{P}^i$ sur l'intersection des images des atomes sur lesquels (10) est vraie par les isomorphismes (19) et (20) de façon à avoir:

$$\frac{1}{n}\sum_{k+1}^{k+n} |P^i - \bar{P}^i| < \varepsilon.$$

D'où le résultat.

COROLLAIRE 1. *Soit $R = P \vee Q$ une partition abstraite. Considérons le schéma de Bernoulli avec R comme générateur indépendant (la translation T sur $R^{\mathbf{Z}} = X$). Soit encore R pour désigner la partition engendrée par la coordonnée 0 dans X. Alors il existe une partition B de X telle que:*

(1) *Les T^iB, $i \in \mathbf{Z}$, sont indépendantes*

(2) $$(P)_T \perp (B)_T$$

(3) $$(P)_T \vee (B)_T = X.$$

DEMONSTRATION. Il est facile de vérifier ici que R est $(P)_T$-conditionnellement très faiblement de Bernoulli (les $T^iR, i \in \mathbf{Z}$, sont $(P)_T$-conditionnellement indépendantes); le lemme précédent et la Proposition 3 de (6) entraînent alors la conclusion.

La même remarque nous permet de décrire le système entrée-sortie, pour une entrée quelconque, quand le canal est avec bruit et sans mémoire:

Soit (X, T) un système dynamique ergodique et P une partition génératrice finie ayant s éléments de ce système.

Soit t un entier positif et soit $(C_{j,k})$, $1 \leqq j \leqq s$, $1 \leqq k \leqq t$ une suite de nombres réels non négatifs tels que: $\Sigma_{k=1}^{t} C_{jk} = 1$ pour tout j.

Soit Q un ensemble fini ayant t éléments $Q = \{q_1, q_2, \cdots q_t\}$. On définit une mesure m^* sur $(P \vee Q)^{\mathbf{Z}}$ de la façon suivante:

Soit $1_{p_{i1}} 1_{p_{i2}} \cdots 1_{p_{in}} 1_{q_{i1}} \cdots 1_{q_{jn}}$ un cylindre de $(P \vee Q)^z$.

Alors:

$$m^*(p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_n}q_{j_1} \cdots q_{j_n}) = m(p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_n}) \prod_{k=1}^{n} C_{i_kj_k}$$

(m est la mesure sur X). m^* est stationnaire pour $(P \vee Q)^{\mathbf{Z}}$ muni de la translation T. On a ainsi défini le système entrée-sortie avec entrée (P, T) et canal donné par la matrice (C_{jk}). Il est ergodique (R. L. Adler [1]) et on a de plus le

COROLLAIRE 2. *Avec les hypothèses ci-dessus, il existe une partition B telle que:*

(1) *Les T^iB, $i \in \mathbf{Z}$, sont indépendantes*

(2) $$(B)_T \perp (P)_T$$

(3) $$(P)_T \vee (B)_T = (P \vee Q)_T.$$

Le Corollaire 1 et le Lemme 5 nous permettent de prouver la:

PROPOSITION 2. *Soit (X, T) un schéma de Bernoulli d'entropie finie. Soit S une transformation inversible préservant la mesure sur X telle que toute sous σ-algèbres de X invariante par S ou par T soit invariante par S et par T. Alors $S = T$ ou $S = T^{-1}$.*

DEMONSTRATION. (1) Il existe une partition abstraite P ayant 4 éléments telle qu'on puisse l'écrire $P = Q \vee R$ avec Q non indépendante de R et $Q \wedge R \neq \nu$ telle que:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

et que si ρ est la partition dont les éléments sont p_1 et $p_2 \cup p_3 \cup p_4$, et si P_1 est une partition telle que $d(P_1) = d(P)$ indépendante de P, il existe une partition $\tilde{P}$ ayant 4 éléments telle que:

(α) $\qquad E^*(\tilde{P}) = E(P) - E(\rho)$

(β) $\qquad d^*(P, \tilde{P}) < a$ $\qquad$ (Par $d^*(P, \tilde{P})$ on désigne la distance obtenue en considérant les réalisations de P et de $\tilde{P}$ telles que $\tilde{P} \perp \rho$.)

(γ) $\qquad d(P, P_1) > 10a$

On peut trouver P satisfaisant ces hypothèses en imposant en plus à $E(P)$ n'importe quelle valeur positive et plus petite que log 2. On vérifie facilement qu'il suffit de prouver la proposition pour un schéma de Bernoulli ayant son entropie comprise entre ces bornes.

(2) Soit (X, T) le schéma de Bernoulli muni du générateur indépendant P vérifiant $(1) - (\alpha)(\beta)(\gamma)$. Il existe une partition I telle que:

(α) $\qquad d(I) = d(\tilde{P})$

(β) $\qquad |I - P| < 2a$

(γ) $\qquad$ les T^iI sont indépendantes

(δ) $\qquad (I)_T \perp (\rho)_T$

(ε) $\qquad (I)_T \vee (\rho)_T = X.$

(Cela résulte du Corollaire 1 du Lemme 6 et du fait que si H et K sont deux partitions abstraites telles que $E(H) = E(K)$ et si $d(H \vee K)$ est donnée, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver dans le schéma de Bernoulli (Y, S) d'entropie $E(H)$ deux partitions H_1 et K_1 telles que:

(i) Les S^iH_1 $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes
(ii) Les S^iK_1 $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes
(iii) $(H_1)_S = Y$
(iv) $(K_1)_S = Y$
(v) $d(H_1 \vee K_1, H \vee K) < \varepsilon$.

(On reprend les notations utilisées par D. S. Ornstein dans [3].)

Pour voir cela, on prend H^* et S^* telles que: $E(H^*) = E(K^*) > E(H)$ et $d(H^* \vee K^*, H \vee K) < \varepsilon/10$ [soit $u = E(K^*) - E(H)$)].

On considère le schéma de Bernoulli de base $H^* \vee K^*$ muni de la translation T. On prend n suffisamment grand pour que sauf sur un ensemble de mesure plus petite que $\delta/10$, qu'on appelle A_n^c:

(a) les n-noms des atomes de $\vee_0^{-n} T^i(H^* \vee K^*)$ sont des $\delta/10$ suites pour $H^* \vee K^*$

(b) $m(h)$ est comprise entre $\exp(-n(E(H^*) \pm \delta/10))$ $(h \in \vee_0^{-n} T^i H^*)$
$m(k)$ est comprise entre $\exp(-n(E(K^*) \pm \delta/10))$ $(k \in \vee_0^{-n} T^i K^*)$
$m(h \cap k)$ est comprise entre $\exp(-n(E(H^* \vee K^*) \pm \delta/10))$ $(h \cap k \in \vee_0^{-n} T^i(H^* \vee K^*))$

(c) Si P est une partition finie génératrice de (Y, S), sauf sur un ensemble de mesure plus petite que $\delta/10$ qu'on appelle B_n^c la mesure des atomes p de $\vee_0^n T^{-i}P$ est comprise entre $\exp(-n(E(H) \pm \delta/10))$.

A cause de (b) on voit facilement qu'on peut trouver plus que $\frac{1}{2}\exp n(E(H^*) - 3\delta/10)$ atomes de A_n qui ont la propriété que dès qu'ils sont distincts leurs H^* n-noms et leurs K^* n-noms sont distincts. Si δ a été choisi assez petit par rapport à u et n assez grand, le nombre d'atomes précédents sera plus grand que $\exp n(E(H) + \delta/10)$ et on pourra en donnant ces nouveaux noms aux atomes de B_n et en utilisant un théorème de Rokhlin construire $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ dans Y telles que:

$$d(\tilde{H}, H) < \frac{\delta}{10}, \quad d(\tilde{K}, K) < \frac{\delta}{10}, \quad d(\tilde{H} \vee \tilde{K}, H \vee K) < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$E(\tilde{H}, S) > E(H) - \frac{\delta}{10}, \quad E(\tilde{K}, S) > E(K) - \frac{\delta}{10}.$$

Si δ a été choisi suffisamment petit le Lemme 12 de [3] entraîne l'existence de H_1 et K_1. En fait on peut trouver H_1 et K_1 vérifiant (i), (ii), (iii), (iv) et $d(H_1 \vee K_1) = d(H \vee K)$ mais on n'en aura pas besoin ici.

(3) A cause du Lemme 5, on a qu'il existe une injection: $\sigma: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ telle que: $S(T^iP) = T^{\sigma(i)}P$.

On se donne deux entiers distincts k et l et on construit une partition P^* telle que:

(α) les T^iP^* sont indépendantes

(β) $d(P^*) = d(P)$

(γ) $P^* \wedge P = \rho$

(δ) $d(P^* \vee T^kP) \neq d(P^* \vee T^lP)$.

P^* est choisi de la manière suivante. A cause (2) (δ) (ε), on peut définir une transformation inversible préservant la mesure U sur X, commutant avec T, telle que U soit l'identité sur $(\rho)_T$ et U soit T^k sur $(I)_T$. Soit P^* l'image de P par U. Il est évident que P^* vérifie (3)—(α) (β) (γ) et qu'en outre:

$$|T^kI - P^*| = |I - P| < 2a.$$

Par conséquent:

$$|P^* - T^kP| < |P^* - T^kI| + |T^kI - T^kP|$$

$$|P^* - T^kP| < 4a.$$

Maintenant:

$$|P^* - T^lP| > |T^kP - T^lP| - |P^* - T^kP|$$

$$|P^* - T^lP| > 6a. \qquad \text{D'où (3) } (\delta).$$

Le Lemme 5 et (3) (γ) entraînent que: $S(T^iP^*) = T^{\sigma(i)}P^*$. Soit $z = \sigma(0)$.
Nous allons prouver que: $\sigma(i) - i = \sigma(0)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.
Supposons le contraire: Soit j tel que $\sigma(j) - j \neq \sigma(0)$.
Comme S préserve la mesure, on doit avoir:

$$d(P \vee T^jP^*) = d(S(P \vee T^jP^*)) = d(T^{\sigma(0)}P \vee T^{\sigma(j)}P^*)$$

ce qui donne une contradiction si $j = k$, $l = \sigma(j) - \sigma(0)$, dans le choix de P^*.

Il existe donc un entier n tel que $S = T^n$ et comme S a exactement les mêmes facteurs que T, alors $n = \pm 1$.

Proposition 3. *Soient* $(X, (P)_T, (Q)_T, T, m)$ *et* $(\bar{X}, (\bar{P})_{\bar{T}}, (\bar{Q})_{\bar{T}}, \bar{T}, \bar{m})$ *deux systèmes de Bernoulli tels que*:

(1) $\qquad E(P) = E(\bar{P})$

(2) $\qquad E(Q) = E(\bar{Q})$

(3) $\qquad E(P \vee Q, m) = E(\bar{P} \vee \bar{Q}, m) = E(P \vee Q, \tau_1(m)) = E(\bar{P} \vee \bar{Q}, \tau_1(\bar{m}))$.

Alors ils sont isomorphes.

DEMONSTRATION. Soit $R = P \wedge Q, \bar{R} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$. Nous allons montrer que:

$$P \overset{R}{\perp} Q \qquad \text{et} \qquad \bar{P} \overset{\bar{R}}{\perp} \bar{Q}.$$

(C'est la Condition (3) qui va assurer ces relations.) La proposition en résultera puisque d'après le Corollaire 1 précédent, on aura qu'il existe B_1 et B_2 dans X telles que:

$$(B_1)_T \perp (R)_T, (B_1)_T \vee (R)_T = (P)_T, \text{les } T^i B_1 i \in Z \text{ sont indépendantes,}$$

$$(B_2)_T \perp (R)_T, (B_2)_T \vee (R)_T = (Q)_T \text{ les } T^i B_2 i \in Z \text{ sont indépendantes.}$$

Alors les $T^i(B_1 \vee R \vee B_2), i \in Z$, sont indépendantes. En effet

$$E(B_1 \vee R \vee B_2) \geqq E(P \vee Q, T) = E(P \vee Q)$$

et comme

$$\begin{aligned} E(P \vee Q) = E(P \vee Q \vee R) &= E(R) + E(P \vee Q \mid R) \\ &= E(R) + E(P \mid R) + E(Q \mid R). \end{aligned}$$

D'où $$E(B_1 \vee R \vee B_2) = E(R) + E(B_1) + E(B_2)$$

et la conclusion en utilisant (1) et (2).

Pour prouver que:

$$E(P \vee Q, m) = E(P \vee Q, \tau_1(m)) \text{ entraîne que } P \overset{R}{\perp} Q, \text{ on remarque que:}$$

$$E(P \vee Q, m) = E(P, m) + E((Q, m) \mid (P, m))$$

$$E(P \vee Q, \tau_1(m)) = E(P, \tau_1(m)) + E((Q, \tau_1(m)) \mid (P, \tau_1(m)).$$

Comme m et $\tau_1(m)$ coïncident sur P, on a, d'après (3):

$$E((Q, m) \mid (P, m)) = E((Q, \tau_1(m)) \mid (P, \tau_1(m))$$

$$-\int \sum_{q \in Q} E^{(P,m)} 1q \log E^{(P,m)} 1q \, dm = -\int \sum_{q \in Q} E^{(P,\tau_1(m))} 1q \log E^{(P,\tau_1(m))} 1q \, dm.$$

Maintenant:

$$E^{(P,\tau_1(m))} 1q = A\, 1q \quad (A = E^{(P,m)} E^{(Q,m)} E^{(P,m)})$$

(cela résulte de la définition: $\int 1p \, 1q d\tau_1(m) = \int 1pA \, 1q dm$).

Ainsi:

$$\int \sum_{q \in Q} \Phi(E^{(P,m)} 1q)dm = \int \sum_{q \in Q} \Phi(A\, 1q)dm \qquad (\Phi(t) = -t \log t).$$

Mais:

$$E^P E^Q \Phi(E^P 1q) \leqq \Phi(E^P E^Q E^P 1q)$$

(on n'utilise plus maintenant que la mesure m) et l'égalité précédente entraîne que pour tout $q \in Q$, $E^P 1q = A\, 1q$, donc que $E^P f = Af$ pour toute $f \in L^2(Q)$ et qu'alors: $E^P f = A^n f$, $\forall n > 0$ et $E^P f = E^R f$ ce qui est le résultat.

Question. Le Lemme 5 peut être interprété comme suit:

Etant donné un schéma de Bernoulli (X, T) il existe deux sous σ-algèbres de X T-invariantes, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ telles que si S est une transformation inversible préservant la mesure, commutant avec T, telle que $S\mathscr{A} = \mathscr{A}$ et $S\mathscr{B} = \mathscr{B}$ alors $S = T^n$. Peut-on obtenir le même résultat avec la condition que S ne laisse qu'une sous algèbre convenable invariante?

Il y a des analogies entre cette question et l'exemple construit par D. S. Ornstein dans [4].

Bibliographie

1. R. L. Adler, *Ergodic and mixing properties of infinite memory channels*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 924–930.

2. D. L. Burkholder et Y. S. Chow, *Iterates of conditional expectation operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **12** (1961), 490–495.

3. D. S. Ornstein, *Imbedding Bernoulli shifts in flows, Contribution to ergodic theory and Probability*, Lectures notes in Mathematics Series, Springer-Verlag Berlin, 1970, pp. 178-218.

4. D. S. Ornstein, *A mixing transformation that commutes only with its powers*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. University of California Press, 1967, vol. II, part 2, pp. 335–360.

5. P. C. Shields, *Bernoulli shifts are determined by their factor algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **41** (1973), 331–332.

6. J. P. Thouvenot, *Quelques propriétés des systèmes dynamiques qui se décomposent en un produit de deux systèmes dont l'un est un schéma de Bernoulli*, Israel J. Math. **21** (1975), 177–207.

Laboratoire de Probabilités
Université de Paris VI – Tour 56
4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05
France